Přirozený a vyostřený svět

(svět reálný a hyperreálný)

V přirozeném světě N můžeme zavést různé obory čísel

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

Obdobně lze zavést čísla ve vyostřeném světě H

$$^*\mathbb{N} \rightarrow {}^*\mathbb{Z} \rightarrow {}^*\mathbb{Q} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$$

Vyostřený, "hyperreálný" svět je vybudovaný stejnými prostředky jako přirozený svět N, ale s "většími" schopnostmi.

Vztah světů N a H

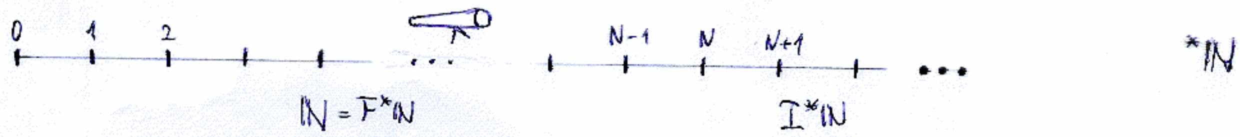
- Oba světy používají stejný jazyk (co lze zformulovat v jednom, lze i v druhém; vše z N lze rozšířit na H)
- Přirozený svět N je vnořený do vyostřeného světa H a všechny vztahy platné v N zůstávají platné v H (vše co vidíme v našem světě N je vidět i v H)
- Vše, co lze popsat (uchopit) pouze prostředky světa H lze popsat (uchopit) i prostředky světa N a patří tudíž i do N
- Vyostřený svět H je větší než přirozený svět N (část, o kterou je H větší než N nelze uchopit pouze prostředky světa H)

Označení číselných oborů

$\mathbb{N}$	přirozená čísla	$0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Z}$	celá čísla	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Q}$	racionální čísla	$\frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{N}$ $q \neq 0$
$\mathbb{R}$	reálná čísla	

${}^*\mathbb{N}$	hyperpřirozená čísla	$0, 1, 2, \dots, N-1, N, N+1, \dots$
${}^*\mathbb{Z}$	hypercelá čísla	
${}^*\mathbb{Q}$	hyperracionální čísla	$\frac{p}{q}$ $p \in {}^*\mathbb{Z}$ $q \in {}^*\mathbb{N}$ $q \neq 0$
$\mathbb{H} = {}^*\mathbb{R}$	hyperreálná čísla	

Hyperpřirozená čísla

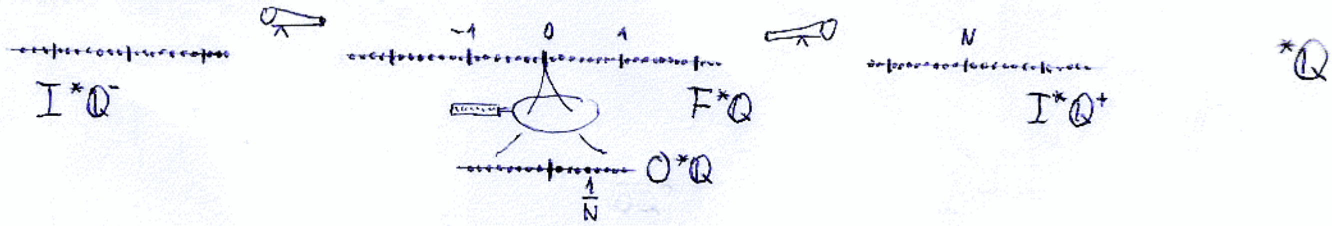


$F{}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}$ konečná hyperpřirozená čísla

$I{}^*\mathbb{N}$ nekonečná hyperpřirozená čísla

$${}^*\mathbb{N} = F{}^*\mathbb{N} \cup I{}^*\mathbb{N} \qquad F{}^*\mathbb{N} \cap I{}^*\mathbb{N} = \emptyset$$

Hyperracionální čísla



$F{}^*\mathbb{Q}$ konečná hyperracionální čísla (ne-nekonečná)

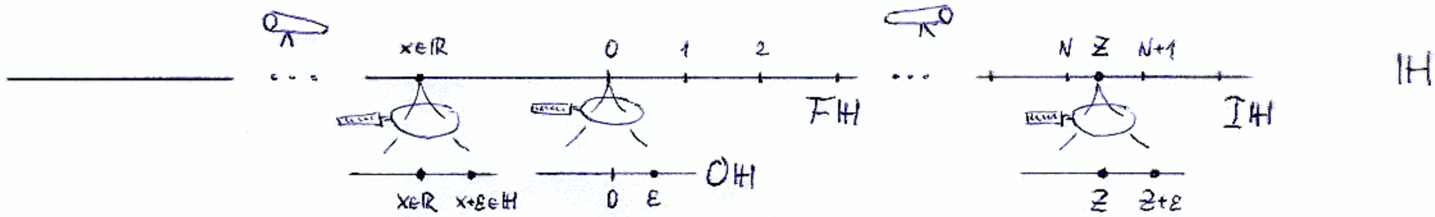
$I{}^*\mathbb{Q}$ nekonečná hyperracionální čísla

$O{}^*\mathbb{Q}$ nekonečně malá hyperracionální čísla

$${}^*\mathbb{Q} = F{}^*\mathbb{Q} \cup I{}^*\mathbb{Q} \qquad F{}^*\mathbb{Q} \cap I{}^*\mathbb{Q} = \emptyset$$

$$O{}^*\mathbb{Q} \subset F{}^*\mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q} \subset {}^*\mathbb{Q} \qquad O{}^*\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$

Struktura hyperreálných čísel



$\mathbb{H} = {}^*\mathbb{R}$ hyperreálná čísla – všechna "čísla" $(x, y, z, \dots)$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ reálná čísla jsou vnořena do $\mathbb{H}$

$O\mathbb{H}$ nekonečně malá čísla $(\varepsilon, \eta, \dots)$

$O\mathbb{H} = \{ \varepsilon \in \mathbb{H} : \forall x \in \mathbb{R}^+ \ |\varepsilon| < x \}$

$F\mathbb{H}$ konečná čísla (ne-nekonečná)

$F\mathbb{H} = \{ x \in \mathbb{H} : \exists y \in \mathbb{R}^+ \ |x| < y \}$

$I\mathbb{H}$ nekonečná čísla $(X, Y, Z, \dots)$

$I\mathbb{H} = \{ Z \in \mathbb{H} : \forall x \in \mathbb{R}^+ \ x < |Z| \}$

platí:

$\mathbb{H} = F\mathbb{H} \cup I\mathbb{H} \qquad F\mathbb{H} \cap I\mathbb{H} = \emptyset$

$O\mathbb{H} \subset F\mathbb{H} \qquad \mathbb{R} \subset \mathbb{H} \qquad O\mathbb{H} \cap \mathbb{R} = \emptyset$

$x \in O\mathbb{H} \ \ x \neq 0 \iff \frac{1}{x} \in I\mathbb{H}$

$x \in F\mathbb{H} \ \ x \notin O\mathbb{H} \iff \frac{1}{x} \in F\mathbb{H} \ \ \frac{1}{x} \notin O\mathbb{H}$

Relace a operace na $\mathbb{H}$

std standardní část konečného čísla

$\mathrm{std} : F\mathbb{H} \to \mathbb{R}$, $x \to \mathrm{std}\, x$

$\mathrm{std}\, x$ je takové reálné číslo, že $x - \mathrm{std}\, x \in O\mathbb{H}$, tj. $x \doteq \mathrm{std}\, x$

$\doteq$ nekonečná blízkost

$x \doteq y \quad \equiv \quad x - y \in O\mathbb{H}$

$\sim$ x, y řádově srovnatelné

$x \sim y \quad \equiv \quad$ buď $x, y = 0$

nebo $\frac{x}{y} \in F\mathbb{H}$ a $\frac{y}{x} \in F\mathbb{H}$

$\prec$ x řádově menší než y $\quad (x, y \in \mathbb{H}_0^+)$

$x \prec y \quad \equiv \quad y \neq 0$ a $\frac{x}{y} \in O\mathbb{H}$ tj. $\frac{x}{y} \doteq 0$

$\approx$ x, y shodné do nejvyššího řádu

$x \approx y \quad \equiv \quad$ buď $x, y = 0$

nebo $\frac{x}{y} \doteq 1$

Čísla určitého řádu

nechť $z \in \mathbb{H}^+$

$F_z\mathbb{H}$ čísla nejvýše řádu z

$$F_z\mathbb{H} = \{ x \in \mathbb{H} : \tfrac{x}{z} \in F\mathbb{H} \}$$

$O(z)$ nějaké číslo z $F_z\mathbb{H}$

$\overset{z}{=}$ rovnost až na chybu řádově menší než z

$$x \overset{z}{=} y \equiv |x-y| < z$$

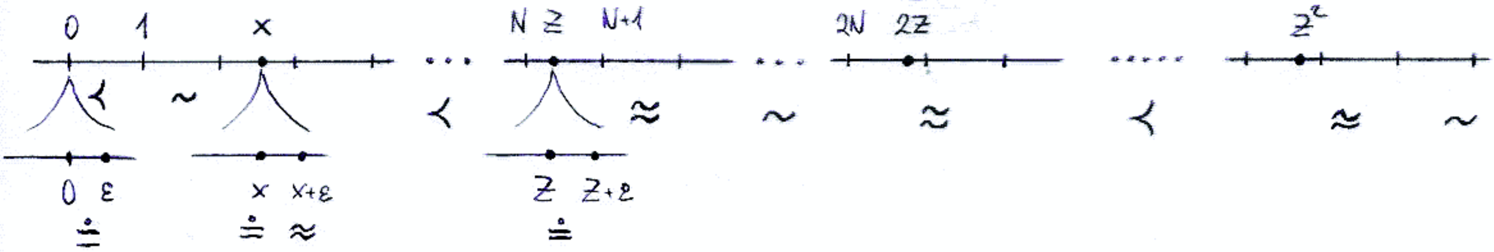
platí:

$z \sim 1 \Rightarrow F_z\mathbb{H} = F\mathbb{H}$

$\overset{z}{=}$ je totožné s $\doteq$

$x, y \sim z \Rightarrow (x \overset{z}{=} y \Leftrightarrow x \approx y)$

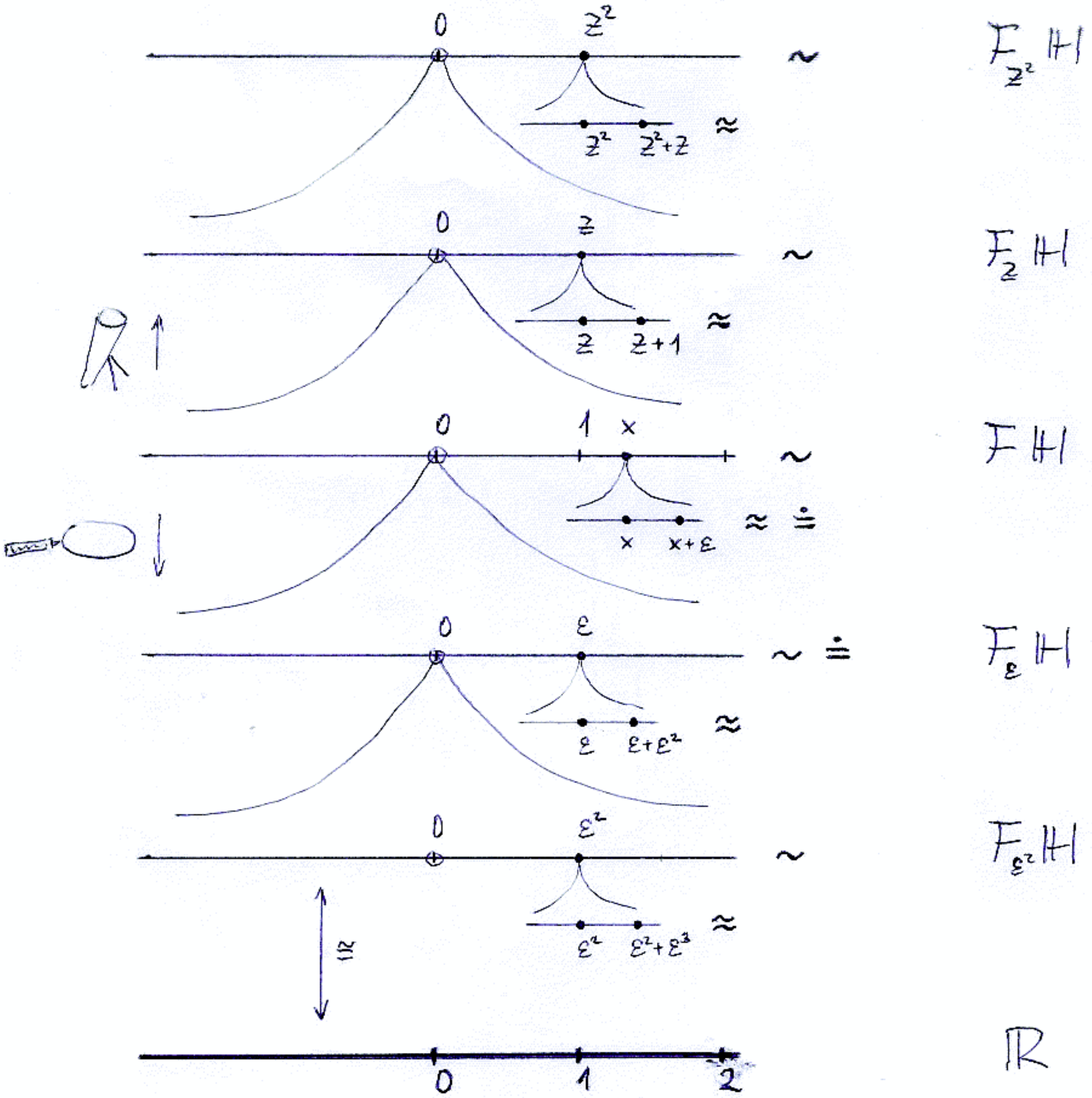
Příklady



$\varepsilon \prec 1$ $1 \sim x$ $x \prec Z$ $N \approx Z$ $N \sim 2N$ $2N \approx 2Z$ $Z \prec Z^2$ $Z^2 \approx Z^2+Z$

$0 \doteq \varepsilon$ $x \doteq x+\varepsilon$ $Z \doteq Z+\varepsilon$ $Z^2 \sim 2N^2$

$x \approx x+\varepsilon$



Monády a isomorfismy s $\mathbb{R}$

Monády konečných čísel jsou isomorfní s $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Mod}(x) = \{ y \in \mathbb{H} : y \doteq x \}$$

$\mathbb{F}\mathbb{H}|_{\doteq}$ třída monád konečných čísel

$$\mathbb{F}\mathbb{H}|_{\doteq} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{F}\mathbb{H}|_{\doteq} \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{Mod}(x) \to \mathrm{std}\, x$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{F}\mathbb{H}|_{\doteq} \qquad x \to \mathrm{Mod}(x)$$

z-monády čísel nejvýše řádu z jsou isomorfní s $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Mod}_z(x) = \{ y \in \mathbb{H} : x \overset{z}{=} y \}$$

$\mathbb{F}_z\mathbb{H}|_{\overset{z}{=}}$ třída z-monád čísel nejvýše řádu z

$$\mathbb{F}_z\mathbb{H}|_{\overset{z}{=}} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{F}_z\mathbb{H}|_{\overset{z}{=}} \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{Mod}_z(x) \to \mathrm{std}\, \frac{x}{z}$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{F}_z\mathbb{H}|_{\overset{z}{=}} \qquad x \to \mathrm{Mod}_z(xz)$$

l-monády veličin nejvýše řádu l jsou isomorfní s $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Mod}_l(a) = \{ c \in V : c \overset{l}{=} a \}$$

$\mathbb{F}_l V|_{\overset{l}{=}}$ třída l-monád veličin nejvýše řádu l

$$\mathbb{F}_l V|_{\overset{l}{=}} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{F}_l V|_{\overset{l}{=}} \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{Mod}_l(a) \to \mathrm{std}\, \frac{a}{l}$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{F}_l V|_{\overset{l}{=}} \qquad x \to \mathrm{Mod}_l(xl)$$

Veličiny s rozměrem

V 1-dim. vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ $(a, b, \ell, A, B, L \ldots)$

- prvky V představují hodnoty určitého rozměru
- neexistuje přirozená jednotková hodnota
- prvky V lze sčítat a násobit čísly z $\mathbb{R}$

  $c = xa + yb$
- V obsahuje nulový prvek 0

  $a + 0 = a$ $\qquad x\,0 = 0$
- prvky z V lze vzájemně poměřovat

  $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R} \quad \equiv \quad b \neq 0 \quad a = xb$

Relace a operace na V

$\sim$ veličiny stejného řádu

$a \sim b \equiv$ buď $a, b = 0$

nebo $\frac{a}{b} \sim 1$

$\prec$ řádově menší

$a \prec b \equiv b \neq 0$ a $\left|\frac{a}{b}\right| \prec 1$

$\approx$ rovno v nejvyšším řádu

$a \approx b \equiv$ buď $a, b = 0$

nebo $\frac{a}{b} \doteq 1$

$\stackrel{\ell}{=}$ rovno až na chybu řádově menší než $\ell \neq 0$

$a \stackrel{\ell}{=} b \equiv |a-b| \prec \ell$

$F_\ell V$ veličiny nejvýše řádu ℓ

$F_\ell V = \left\{ a \in V : \frac{a}{\ell} \in FHI \right\}$

platí:

$a, b \sim \ell \implies (a \stackrel{\ell}{=} b \iff a \approx b)$

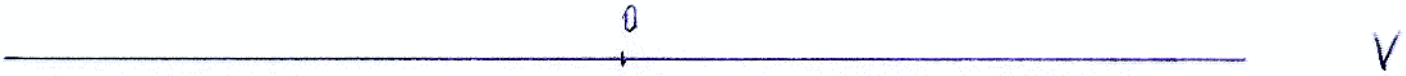
$\ell \prec L \implies$

1, $a \in F_\ell V \implies a \stackrel{L}{=} 0$

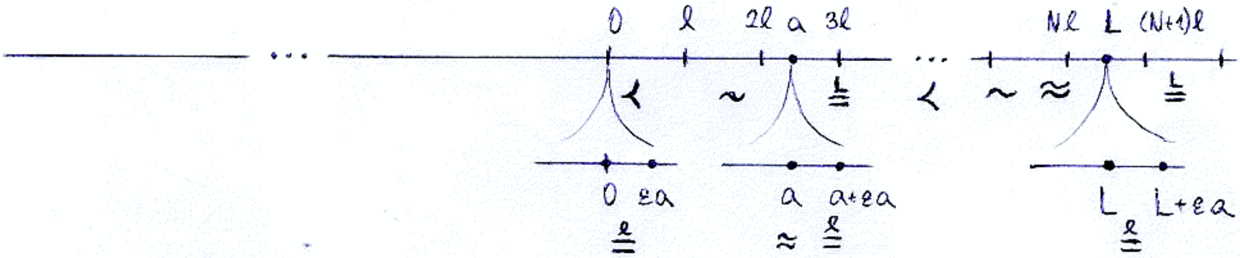
2, $A \sim L \implies \forall a \in F_\ell V \; a \prec A$

Příklady

prostor V bez zvolené škály



prostor V se zvolenými nesouměrnými škálami $\ell < L$

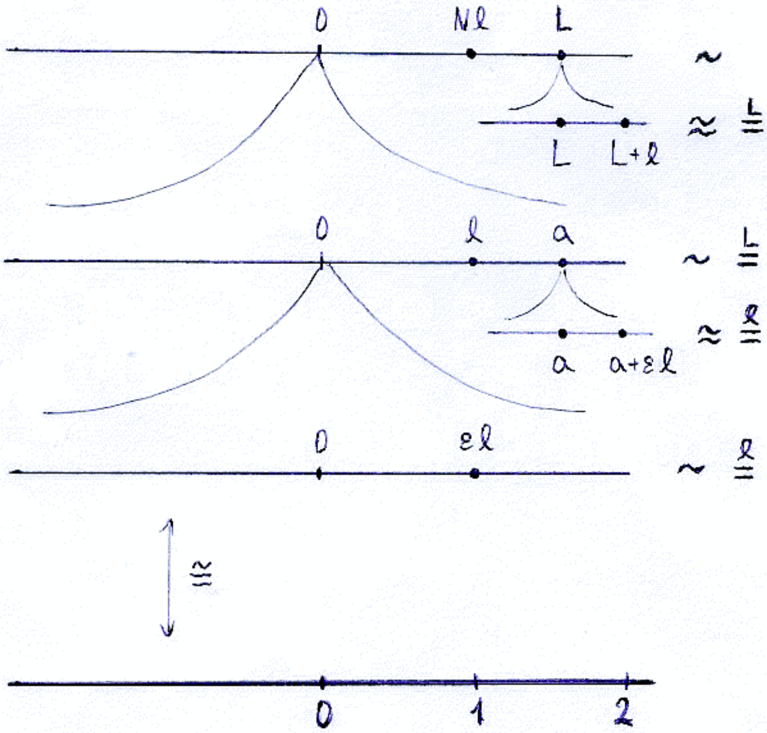


$\varepsilon \in \mathrm{OHI}$ $\quad N \in \mathrm{I}^*\mathbb{N}$

$\varepsilon a < \ell \quad \ell \sim a \quad a < L \quad N\ell \sim L \quad N\ell \overset{L}{=} L$

$0 \overset{\ell}{=} \varepsilon a \quad 0 \overset{L}{=} a \quad N\ell \approx L$

$a \approx a + \varepsilon a \quad a \overset{\ell}{=} a + \varepsilon a \quad L \overset{\ell}{=} L + \varepsilon a$



$F_{N\ell} V$

$F_{\ell} V$

$F_{\varepsilon\ell} V$

$\mathbb{R}$

Základy diferenciálního kalkulu

Rozšíření posloupností a fcí

je-li $\{a_n\}_{n\in N}$ (resp. f) posloupnost (funkce) ve světě N, lze rozšířit na posloupnost (funkci) ve světě H

$\{a_n\}_{n\in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \{a_n\}_{n\in {}^*\mathbb{N}}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \rightsquigarrow f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$

tyto objekty jsou v H popsány stejně jako v N

Limita posloupnosti

$a_n \to a$ v N $\equiv$

$\exists a\in\mathbb{R} \quad \forall N\in \mathbb{I}^*\mathbb{N} \quad a_N \doteq a$

$a_n \to \pm\infty$ v N $\equiv$

$\forall N\in \mathbb{I}^*\mathbb{N} \quad a_N \in \mathbb{I}\mathbb{H}^{\pm}$

Spojitost funkcí

f je spojitá v x ve světě N $\equiv$

$\forall \varepsilon\in \mathbb{O}\mathbb{H} \quad f(x+\varepsilon)\doteq f(x)$

Derivace funkce

f' je derivace f ve světě N $\equiv$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad \forall\varepsilon\in \mathbb{O}\mathbb{H} \quad f'(x) \doteq \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$

Př: $f(x)=x^2 \qquad \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left((x+\varepsilon)^2-x^2\right) = 2x+\varepsilon \qquad \Rightarrow f'(x)=2x$

Interpretace hyperreálných čísel v modelu

- Běžně měřené hodnoty fyzikálních veličin jsou popsány reálnými čísly $\mathbb{R}$ přirozeného světa N.
  (Tj., měříme rozumné, konečné hodnoty.)

- Často se vynořuje škála z nesrovnatelná s běžnými hodnotami (větší/menší než jakékoli rozumné hodnoty).

- Tato škála může charakterizovat úroveň, do které nás zajímají detaily.

- Tato škála může též charakterizovat hranici platnosti fyzikálního popisu.

- Škálu z popisujeme pomocí hyperreálného čísla – buď z IH, nebo z OH.
  To nám umožňuje přesnější kontrolu nad objekty, vlastnostmi či vztahy vynořujícími se zpoza horizontu.

- Škála z, jakožto objekt z H, ale ne z N, nemůže mít konkrétní hodnotu. Pokud bychom její hodnotu konkrétně specifikovali, vynořila by se škála z zpoza horizontu a zbyl by nám buď pouze svět N nebo pouze svět H

- Horizont mezi N a H vystihuje kvalitativní změnu velikosti, počtu, uchopitelnosti.
  Nevystihuje rozdíl mezi různými fyzikálními popisy reality, pouze dává prostor pro změnu fyzikálního popisu na různých škálách.
  Fyzikální popis za horizontem (v H) může a nemusí být stejný jako před ním (v N)

Struktura čísel za horizontem

1) Vyostřený svět má "spojitou" povahu

Reálná čísla jsou zavedena jak v N (čísla $\mathbb{R}$), tak v H (čísla $^*\mathbb{R}$)

Horizont charakterizuje pouze rozdíl v schopnostech "vidění" světa N a světa H

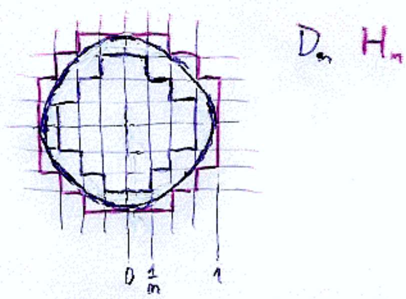
2) Vyostřený svět má "diskrétní" povahu

Reálná čísla $\mathbb{R}$ jsou zavedena pouze ve světě N, ve vyostřeném světě H máme k dispozici pouze hyperracionální čísla $^*\mathbb{Q}$.

Reálná čísla lze chápat jako monády čísel z $^*\mathbb{Q}$

$$\mathbb{R} \cong F\,{}^*\mathbb{Q}|_{\doteq}$$

příklady:



- číslo π

  plocha kruhu $r=1$

  $$D_n < \pi < H_n$$

  $$D_m < D_n \qquad H_m > H_n \qquad \text{pro } m < n$$

  $$D_N \doteq H_N \qquad \text{pro } N \in I^*\mathbb{N}$$

  $\Rightarrow$ D_N, H_N $N \in I^*\mathbb{N}$ patří do jedné monády, tj. reprezentuje číslo $\pi \in \mathbb{R}$.
  V $^*\mathbb{Q}$ ale číslo π není (tj. ani v monádě)

- číslo e

  $$e = \mathrm{Mod}\left(\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1} \right) \qquad N \in I^*\mathbb{N}$$