

# SNĚNÍ O FAIROVÉ DEMOKRACII

Milan Vlach

Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova  
Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1, Czech Republic  
e-mail: vlach@ktiml.mff.cuni.cz

Kyoto College of Graduate Studies for Informatics  
7 Monzen-cho, Tanaka, Sakyo-ku, Kyoto 606-8225, Japan  
e-mail: m\_vlach@kcg.ac.jp

The formulation of a problem is often more essential than its solution, which may be merely a matter of mathematical or experimental skill.

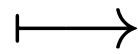
*Einstein, Infeld*

Mathematicians are like Frenchmen: As soon as you tell them something, they translate it into their own language, and it immediately appears different.

*Goethe*

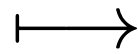
1	2	3
P	W	V
V	P	W
W	V	P

1	2	3
P	W	V
V	P	W
W	V	P



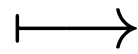
{1, 2, 3}		
X	X	X
X	X	X

1	2	3
P	W	V
V	P	W
W	V	P



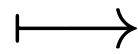
	{1, 2, 3}	
P	X	X
V	X	X

1	2	3
P	W	V
V	P	W
W	V	P



{1, 2, 3}		
P	V	X
V	W	X

1	2	3
P	W	V
V	P	W
W	V	P

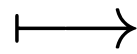


{1, 2, 3}		
P	V	W
V	W	P



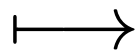
1	2	3
K	J	Č
Č	K	J
J	Č	K

1	2	3
K	J	Č
Č	K	J
J	Č	K



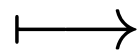
{1, 2, 3}		
X	X	X
X	X	X

1	2	3
K	J	Č
Č	K	J
J	Č	K



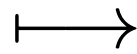
{1, 2, 3}		
K	X	X
Č	X	X

1	2	3
K	J	Č
Č	K	J
J	Č	K



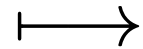
{1, 2, 3}		
K	Č	X
Č	J	X

1	2	3
K	J	Č
Č	K	J
J	Č	K

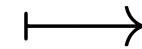


{1, 2, 3}		
K	Č	J
Č	J	K

1	2	3
a	c	a
b	b	c
c	a	b

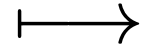


{1, 2, 3}		
a	c	a
b	b	c

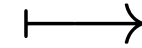


{1, 2, 3}
a
c
b

1	2	3
a	b	c
b	c	a
c	a	b



{1, 2, 3}		
a	b	c
b	c	a



{1, 2, 3}
-
-
-

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat markýz de Condorcet,  
17. 9. 1743 - 28. 3. 1794



- Studium: Jesuitská kolej v Remeši, Collège de Navarre v Paříži, matematika u d'Alemberta.
- 1765 – 1774: Kariéra matematika, člen Královské akademie věd, čestný člen mnoha zahraničních akademií a filosofických společností, spolupráce s L. Eulerem a B. Franklinem.
- 1774: Jmenován generálním inspektorem mincovny.
- 1777: Jmenován tajemníkem Akademie věd.
- 1782: Zvolen členem Francouzské akademie.



- 1789: Účast ve Francouzské revoluci.
- 1791: Zvolen za Paříž do *Zákonodárného shromáždění*; návrh reformy francouzského školství, návrh ústavy, boj za práva žen a černochoů.
- 1792: Hlasoval proti popravě krále Ludvíka XVI, zařazen mezi Girondisty.
- 1793: Po převzetí moci Jakobíny kritizoval pozměněný návrh ústavy, označen za zrádce, vydán zatykač, pět měsíců se skrývá v Paříži.
- 1794: 28. března umírá za nevyjasněných okolností ve vězení v Bourg-la-Reine.

- ❖ *Du calcul intégral, 1765.*
- ❖ *Du probleme des trois corps, 1767.*
- ❖ *Essais d'analyse, 1768.*
- ❖ *Contribution au Supplément de l'Encyclopédie (22 articles sur l'analyse mathématique), 1776-1777.*
- ❖ *Essai sur l'application de l'analyse a la probabilté des decisions rendues a la pluralité des voix, 1785.*

- ❖ *Du calcul intégral, 1765.*
- ❖ *Du probleme des trois corps, 1767.*
- ❖ *Essais d'analyse, 1768.*
- ❖ *Contribution au Supplément de l'Encyclopédie (22 articles sur l'analyse mathématique), 1776-1777.*
- ❖ *Essai sur l'application de l'analyse a la probabilté des decisions rendues a la pluralité des voix, 1785.*

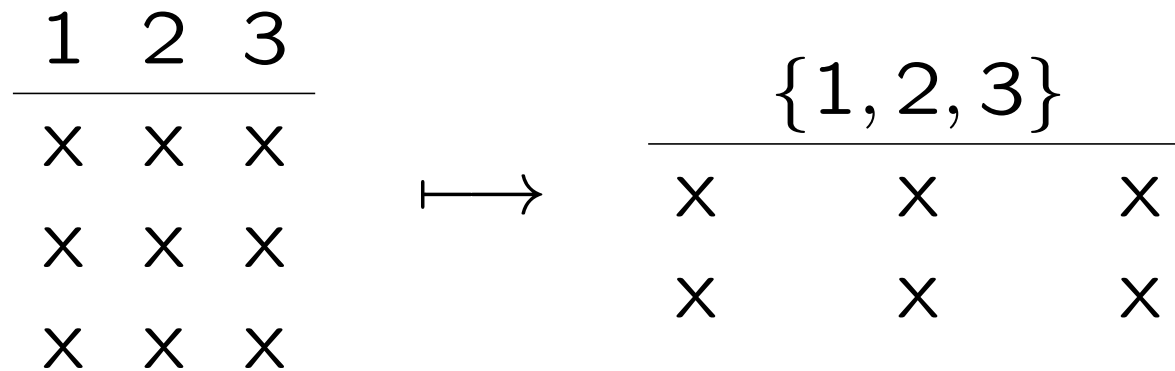
Nejcitovanější a nejméně čtené; a když čtené, tak často chabě pochopené dílo teorie hlasování.

## *Condorcetův jev*

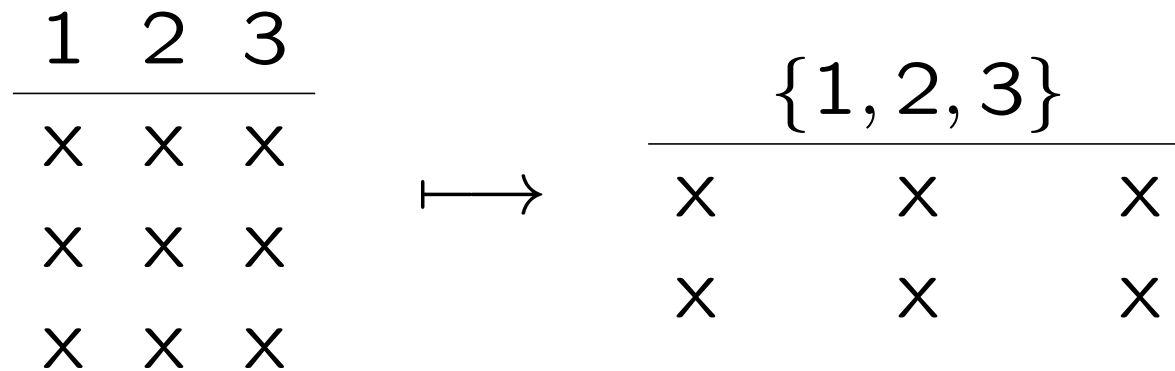
Je Condorcetův jev typický pro většinové hlasování?

Kdy se při většinovém hlasování Condorcetův jev nevyskytuje?

Existují hlasovací metody, v nichž se Condorcetův jev nevyskytuje?



tříčlenná skupina	216 profilů
pětičlenná skupina	7 776 profilů
sedmičlenná skupina	279 936 profilů



tříčlenná skupina	216 profilů	5,6%
pětičlenná skupina	7 776 profilů	6,9%
sedmičlenná skupina	279 936 profilů	7,8%

$m \backslash n$	3	5	7	9	...	limita
3	.056	.069	.075	.078	...	.088
4	.111	.139	.150	.156	...	.176
5	.160	.200	.215	.230	...	.251
6	.202	.255	.258	.284	...	.315
7	.239	.299	.305	.342	...	.369
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
limita	1.000	1.000	1.000	1.000	...	1.000

Existují hlasovací metody bez Condorcetova jevu?

1	2	3
.	.	.
.	.	.
.	.	.

⟶

Skupina
c
a
b

1	2	3
.	x	.
.	y	.
.	z	.

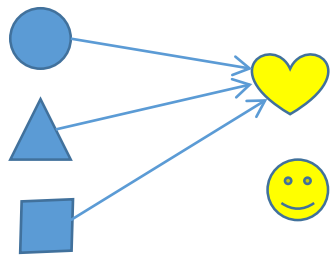
⟶

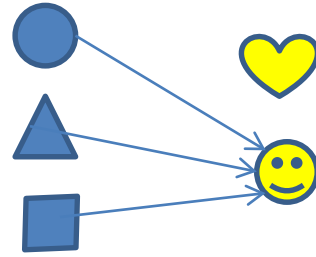
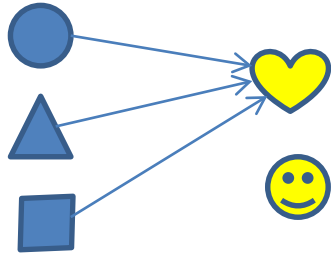
Skupina
x
y
z

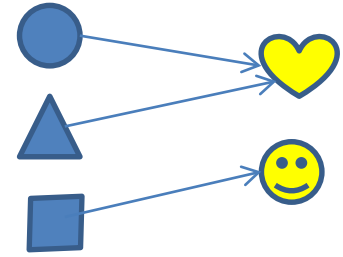
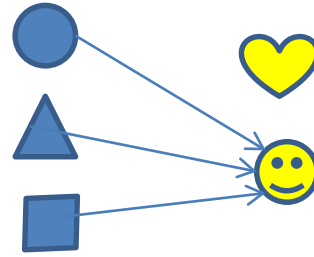
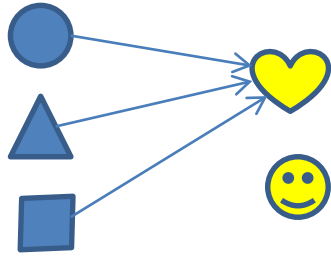
Kolik jich je v případě 3 na 3?

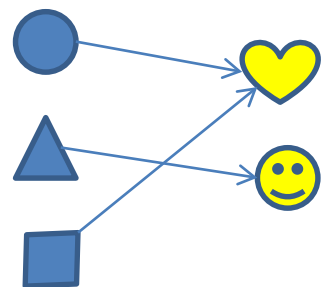
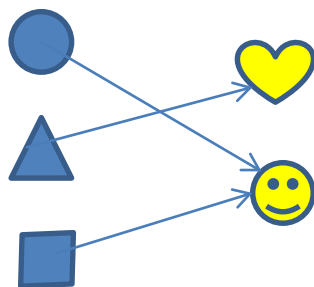
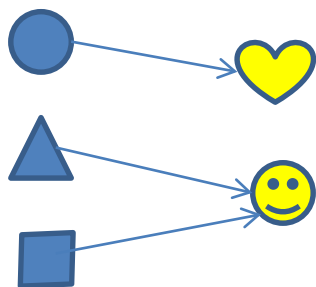
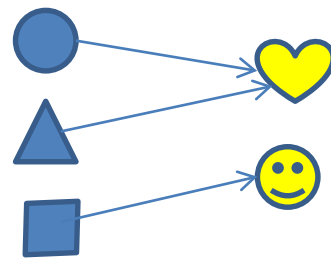
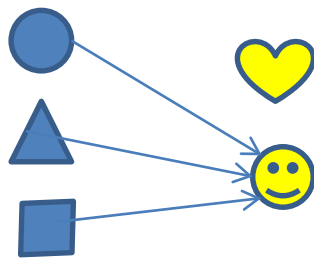
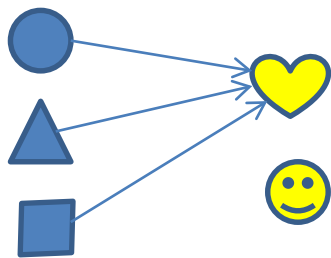


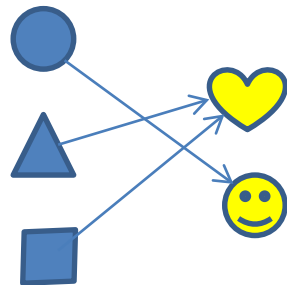
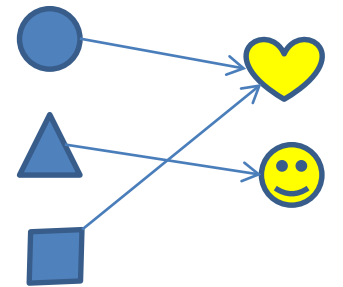
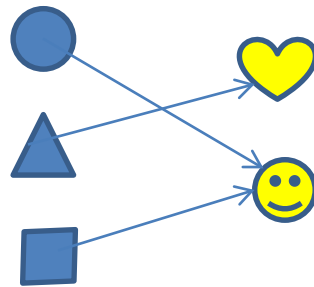
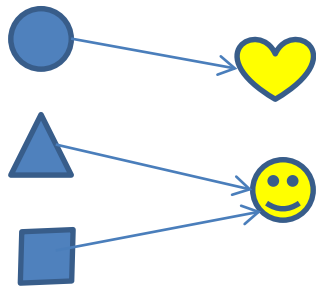
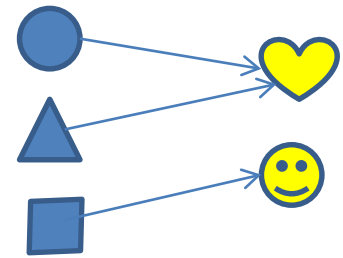
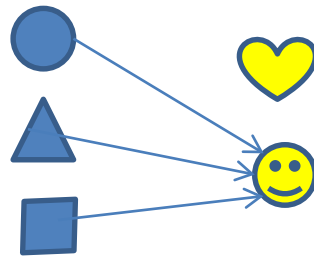
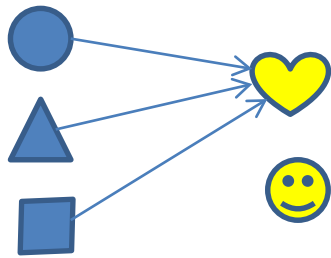


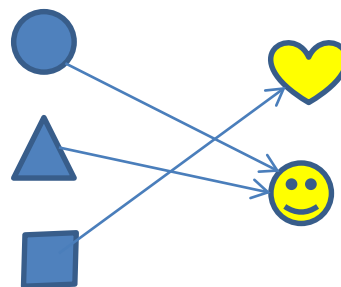
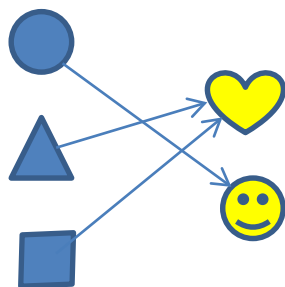
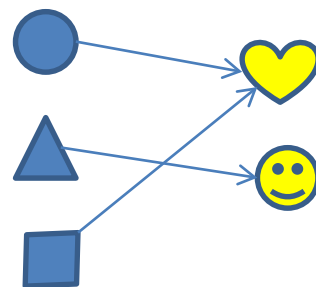
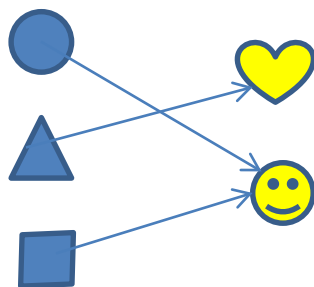
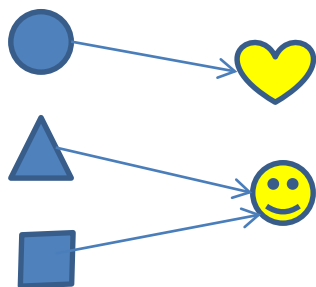
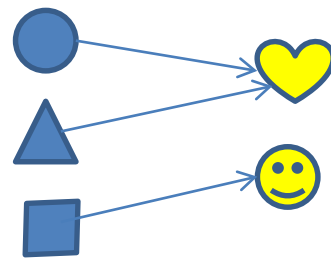
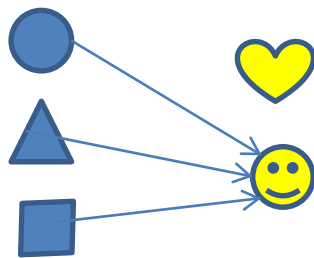
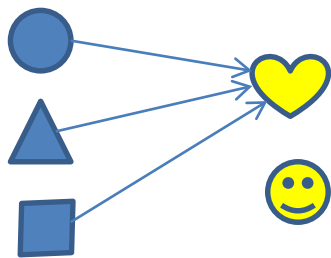












Existují hlasovací metody bez Condorcetova jevu?

1	2	3
.	.	.
.	.	.
.	.	.

⟶

Skupina
c
a
b

1	2	3
.	x	.
.	y	.
.	z	.

⟶

Skupina
x
y
z

Kolik jich je v případě 3 na 3?



Existují hlasovací metody bez Condorcetova jevu?

1	2	3
.	.	.
.	.	.
.	.	.

⟶

Skupina
c
a
b

1	2	3
.	x	.
.	y	.
.	z	.

⟶

Skupina
x
y
z

Kolik jich je v případě 3 na 3?

$6^{216}$

1	2
a	a
b	b

1	2
a	b
b	a

1	2
b	a
a	b

1	2
b	b
a	a

Skupina
a
b

Skupina
b
a

1	2
a	a
b	b

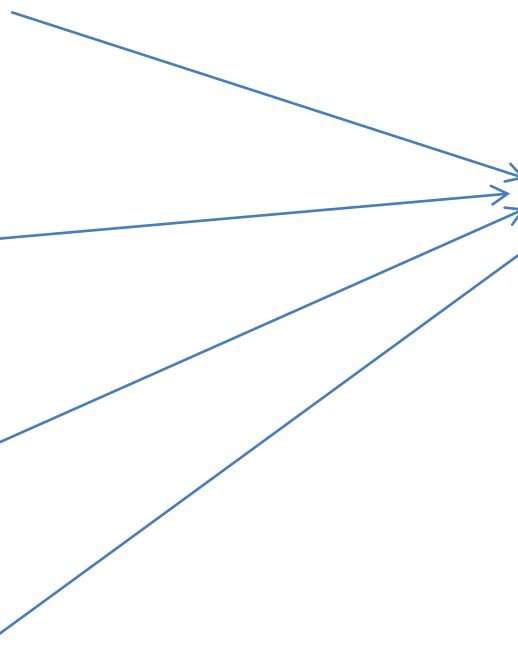
1	2
a	b
b	a

1	2
b	a
a	b

1	2
b	b
a	a

Skupina
a
b

Skupina
b
a



1 2  
a a  
b b

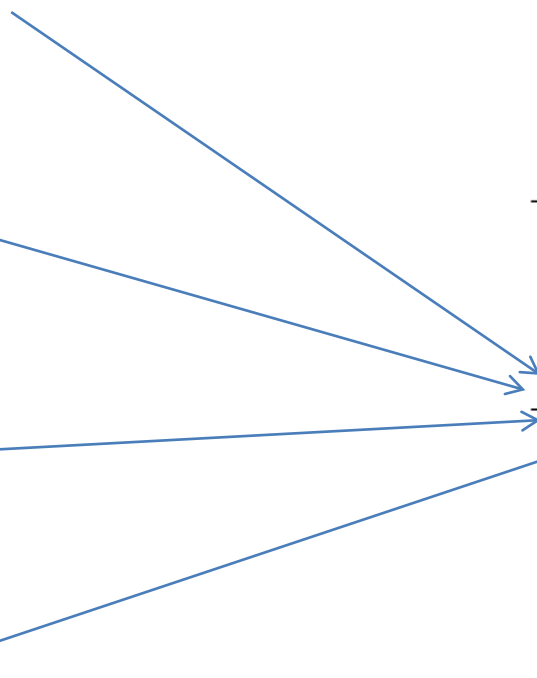
1 2  
a b  
b a

1 2  
b a  
a b

1 2  
b b  
a a

Skupina  
a  
b

Skupina  
b  
a

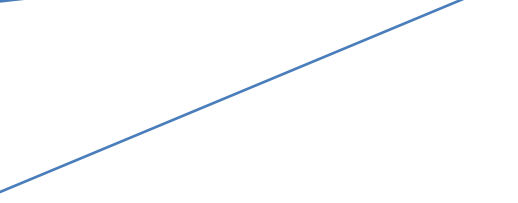


1 2  
a a  
b b

1 2  
a b  
b a

1 2  
b a  
a b

1 2  
b b  
a a



Skupina  
a  
b

Skupina  
b  
a

1 2  
a a  
b b

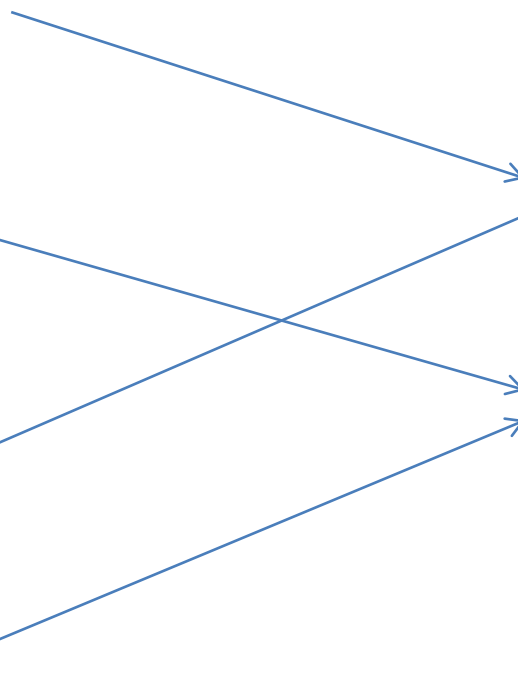
1 2  
a b  
b a

1 2  
b a  
a b

1 2  
b b  
a a

Skupina  
a  
b

Skupina  
b  
a



1 2  
a a  
b b

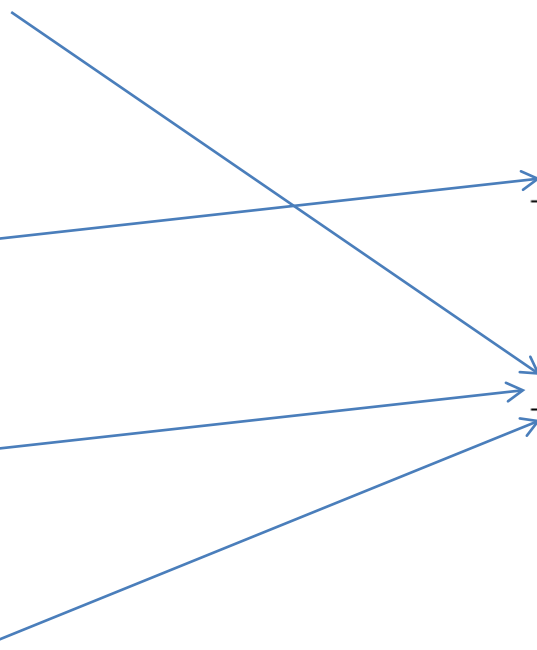
1 2  
a b  
b a

1 2  
b a  
a b

1 2  
b b  
a a

Skupina  
      
a  
b

Skupina  
      
b  
a



1 2  
a a  
b b

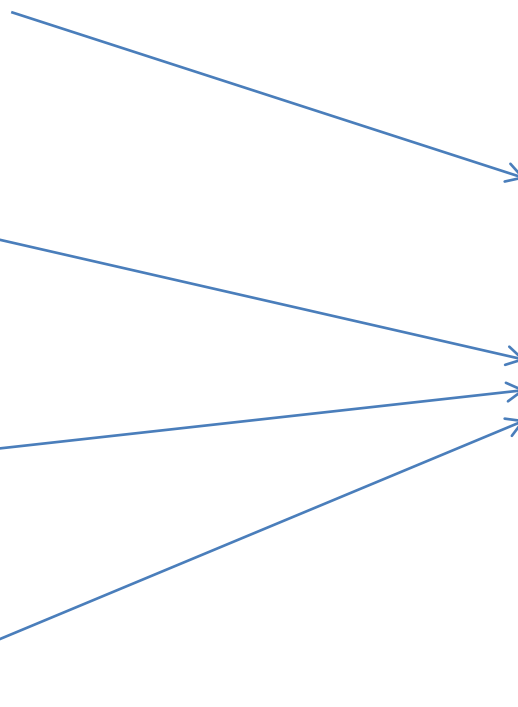
1 2  
a b  
b a

1 2  
b a  
a b

1 2  
b b  
a a

Skupina  
a  
b

Skupina  
b  
a





## Funkce společenského blahobytu (Social welfare function)

- $X$  značí množinu alternativ.
- $N$  značí množinu členů.
- $\mathbb{P}$  značí množinu uspořádání množiny  $X$ .
- $\mathbb{P}^N$  značí množinu individuálních profilů.

Funkce společenského blahobytu je zobrazení

$$\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}$$

# Požadované vlastnosti

- Dávají-li všichni členové skupiny přednost alternativě  $x$  před alternativou  $y$ , pak také skupina dává přednost  $x$  před  $y$ .

# Požadované vlastnosti

- Dávají-li všichni členové skupiny přednost alternativě  $x$  před alternativou  $y$ , pak také skupina dává přednost  $x$  před  $y$ .
- Společenská preference mezi jakýmkoliv dvěma alternativami závisí pouze na preferencích členů mezi těmito dvěma alternativami.

# Keneth J. Arrow

(1921 - 2017)



*Má-li množina alternativ alespoň tři prvky a má-li skupina alespoň dva členy, pak jedinými funkcemi společenského blahobytu, které mají obě požadované vlastnosti, jsou diktatury.*

K. J. Arrow: *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed., Wiley, New York, 1963. (Společenský výběr a individuální hodnoty, Svoboda, Praha, 1971, 17 Kčs.)

K. J. Arrow: *Social Choice and Individual Values*, 2nd. ed., Wiley, New York, 1963.

A. K. Sen: *Collective Choice and Social Welfare*, San Francisco: Holden-Day; and Edinburgh: Oliver & Boyd, 1970.

J. S. Kelly: *Social Choice Theory: An introduction*, Berlin, Springer, 1988.

D. E. Campbell, J. S. Kelly: *Preference Aggregation*, Math. Japonica 45, 573–593, 1997.

K. J. Arrow, A. K. Sen and K. Suzumura, eds.: *Handbook of Social Choice and Welfare*, Elsevier, Amsterdam, Volume 1, 2002.

A *filter* on  $E$  is a set  $\mathcal{F}$  of subsets of  $E$  such that

- $E \in \mathcal{F}$  and  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ;
- If  $X \subseteq Y \subseteq E$  and  $X \in \mathcal{F}$ , then  $Y \in \mathcal{F}$ ;
- If  $X \in \mathcal{F}$  and  $Y \in \mathcal{F}$ , then  $X \cap Y \in \mathcal{F}$ .

Maximal filters are called *ultrafilters*.

If  $Z$  is a nonempty subset of  $E$ . Then the set

$$\{X \subseteq E : Z \subseteq X\}$$

is a filter on  $E$ . Such filters are called the *principal filters* generated by  $Z$ .

A principal filter is an ultrafilter if and only if it is generated by a singleton.

On a finite set every filter is principal.

A subset  $J \subseteq N$  of individuals is decisive for  $(x, y)$  if, for every profile  $p$ ,  $x \succ^p y$  whenever  $x \succ_j^p y$  for all  $j \in J$ . A subset  $J \subseteq N$  is decisive if it is decisive for all  $(x, y)$ .

A subset  $J \subseteq N$  is inversely decisive for  $(x, y)$  if, for every profile  $p$ ,  $y \succ^p x$  whenever  $x \succ_j^p y$  for all  $j \in J$ . A subset  $J \subseteq N$  is inversely decisive if it is inversely decisive for all  $(x, y)$ .



Any coalition that is decisive for some pair of alternatives is decisive for every pair of alternatives.

Any coalition that is inversely decisive for some pair of alternatives is inversely decisive for every pair of alternatives.

The collection of decisive sets or the collection of inversely decisive sets (whichever is nonempty) is an ultrafilter.

Let  $\mathcal{D}$  be the set of decisive coalitions. By Pareto condition  $N \in \mathcal{D}$ . Thus  $\mathcal{D}$  is nonempty. Moreover,  $\mathcal{D}$  is finite because  $N$  is finite.

Let  $H$  be any member of  $\mathcal{D}$  of smallest cardinality. This cardinality is positive because  $\emptyset$  is not decisive.

Let  $j$  be any member of  $H$ . If  $\{j\} \in \mathcal{D}$ , then  $j$  is a dictator. If  $\{j\} \notin \mathcal{D}$ , then  $N \setminus \{j\} \in \mathcal{D}$ . Thus  $H \cap (N \setminus \{j\}) \in \mathcal{D}$ , which is a contradiction.

O všem se už přemýšlelo, naším úkolem je přemýšlet o tom znovu.



Odmítat teorii jako neužitečnou kvůli tomu, abychom pracovali na každodenních věcech, je jako navrhovat odříznout stromu kořeny, protože právě nemá ovoce.



- $X$  značí množinu alternativ.
- $N$  značí množinu členů.
- $\mathbb{P}$  značí množinu uspořádání množiny  $X$ .
- $\mathbb{P}^N$  značí množinu individuálních profilů.

Funkce společenského blahobytu (Social welfare function)  
je zobrazení

$$\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}$$

Funkce společenského výběru (Social choice function)  
je zobrazení

$$\mathbb{P}^N \rightarrow X \quad \mathbb{P}^N \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

# Jean-Charles, chevalier de Borda (1733 –1799)

Navrhl hlasovací systém, který pak dvacet let používala francouzská akademie věd.



Poslední alternativa získá 0 bodů, předposlední 1 bod, před předposlední 2 body, . . .

Vyhrává alternativa s největším počtem bodů.

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7	body
a	a	a	c	c	b	e	4
b	d	d	b	d	c	c	3
c	b	b	d	b	d	d	2
d	e	e	e	a	a	b	1
e	c	c	a	e	e	a	0

$$a : 4 + 4 + 4 + 0 + 1 + 1 + 0 = 14$$

$$b : 3 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 1 = 17$$

$$c : 2 + 0 + 0 + 4 + 4 + 3 + 3 = 16$$

$$d : 1 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 = 16$$

$$e : 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 4 = 7$$

## Nicholas of Kues (1401 – 1464)

Navrhl reformu Svaté říše římské a hlasovací metodu pro výběr císařů, která je ve své podstatě stejná jako metoda, kterou navrhl Borda.



# *Plurality*

Vyhrává alternativa, která má největší počet prvních míst.

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a



## *Hare*

Vyhrává alternativa, která má alespoň polovinu prvních míst. V případě, že neexistuje, vyloučí se alternativa nebo alternativy, které mají nejméně prvních míst a proces se opakuje.

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	b	e
b	b	b	b	b	c	c
c	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	c	c
c	c	c	a	a	a	a

## *Podle agendy*

Nejprve se zvolí pořadí alternativ. Pak se první alternativa postupně (ve zvoleném pořadí) většinově srovnává s každou alternativou, prohrávající alternativy se vyřadí a proces se opakuje.

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

Například, pro pořadí  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$  dostaneme:

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$

$b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$

$b \rightarrow d \rightarrow e$

$d \rightarrow e$

## *Diktatura*

Nejprve se vybere jeden člen skupiny, ignorují se preference všech ostatní členů a vyhrává alternativa podle preferencí vybraného člena.

V 1	V 2	V 3	V 4	V 5	V 6	V 7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

# Condorcetův vítěz

Condorcetův vítěz je alternativa, která má při konfrontaci s každou z ostatních nadpoloviční většinu hlasů.

## Ramon Llull (1235 – 1316)

V roce 2001 byly nalezeny ztracené rukopisy *Ars notandi*, *Ars eleccionis*, a *Alia ars eleccionis*,

Má-li být zvolen jeden z několika kandidátů, bylo by spravedlivé, kdyby tento člověk zvítězil v soutěži s každým ze zbývajících kandidátů.



1	2	3	4	5	6	7
c	c	c	b	b	a	a
b	b	b	a	a	d	d
a	a	a	d	d	c	c
d	d	d	c	c	b	b

$x > y$	a	b	c	d
a	-	2	4	7
b	5	-	2	5
c	3	5	-	3
d	0	2	4	-

Funkci společenského výběru nazveme

- *Paretovskou*, jestliže platí: když každý dává přednost  $x$  před  $y$ , pak funkce nevybere alternativu  $y$ .
- *Monotonní*, jestliže platí: je-li  $x$  vítěznou alternativou a někdo z členů zvýší pozici  $x$  o jedno místo, pak  $x$  zůstane vítězem.



- *Nezávislou na nepodstatných alternativách*, jestliže platí: Jestliže funkce vybere  $x$  a nevybere  $y$  a jestliže někteří členové změní své preference, přičemž nikdo nezmění preference mezi  $x$  a  $y$ , pak funkce nevybere  $y$ .
- *Condorcetovskou*, jestliže platí: existuje-li Condorcetův vítěz, pak je i vítěznou alternativou.

	Par	Mon	Con	Ind
Plurality	yes	yes	no	no
Borda	yes	yes	no	no
Hare	yes	no	no	no
Seq. pairs	no	yes	yes	no
Dictator	yes	yes	no	yes

Jedním ze způsobů, jak se vyhnout Condorcetovu jevu, je omezit svobodu jednotlivců tím, že některé preference se nepovolí.

Jestliže tuto ideu přijmeme, bude jistě vhodné omezit svobodu co možno nejméně.

Tím ovšem vzniká zajímavý a obtížný problém stanovit, které preference nebudou přípustné.

V případě tří alternative  $x, y, z$ , existuje 6 různých lineárních uspořádání

1	2	3	4	5	6
$x$	$x$	$y$	$y$	$z$	$z$
$y$	$y$	$x$	$z$	$x$	$y$
$z$	$z$	$z$	$x$	$y$	$x$

Řekněme, že jedno z nich zakážeme, např.

$x$

$y$

$z$

Pomůže to?

Z následujícího příkladu je vidět, že nikoliv:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{2}} & \underline{\underline{3}} \\ \mathbf{y} & \mathbf{x} & \mathbf{z} \\ \mathbf{x} & \mathbf{z} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{y} & \mathbf{x} \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} \underline{\underline{\{1,2,3\}}} \\ \mathbf{y} & \mathbf{x} & \mathbf{z} \\ \mathbf{x} & \mathbf{z} & \mathbf{y} \end{array}$$

Analogické příklady lze najít pro každé uspořádání, a musíme tedy vyloučit více než jen jedno uspořádání.

Snadno lze ověřit, že je nutné vyloučit po jednom uspořádání z následující dvou skupin:

**x y z**

**z x y**

**y z x**

**x z y**

**y x z**

**z y x**

Dá se také ukázat, že tato nutná podmínka je v případě tří alternativ i podmínkou postačující.

Peter C. Fishburn (2002) *Acyclic sets of linear orders: A progress report*. *Social Choice and Welfare*, 19, 431-447.

Bernard Monjardet (2009) Acyclic domains of linear orders: a survey. In: *The Mathematics of Preference, Choice and Order*; Springer, Berlin.

Donald G. Saari (2009) *Condorcet Domains: A Geometric Perspective*. In: *The Mathematics of Preference, Choice and Order*; Springer, Berlin.

- A SCF is *resolute* if it is single valued on all profiles of strict preferences.
- A SCF is *anonymous* if each pair of voters play interchangeable roles.
- A SCF is *neutral* if each pair of alternatives are interchangeable.



- A SCF is *monotonic* if the following holds: if  $x$  is a winner and one voter switches his or her ballot from  $y$  to  $x$ , then  $x$  remains a winner.
- A SCF is *positively responsive* if the following holds: if  $x$  is a winner and one voter switches her ballot from  $y$  to  $x$ , then  $x$  becomes the unique winner.

## May's Theorem; K. May, 1952

- For two alternatives and an odd number of voters, majority rule is the unique resolute, anonymous, neutral, and monotonic SCF.
- For two alternatives and any number of voters, majority rule is the unique anonymous, neutral, and positively responsive SCF.